где учтен вклад в $\mathbf{p}(t+dt)$ *всех* электронов. Поделив на dt и взяв предел $dt \to 0$, находим

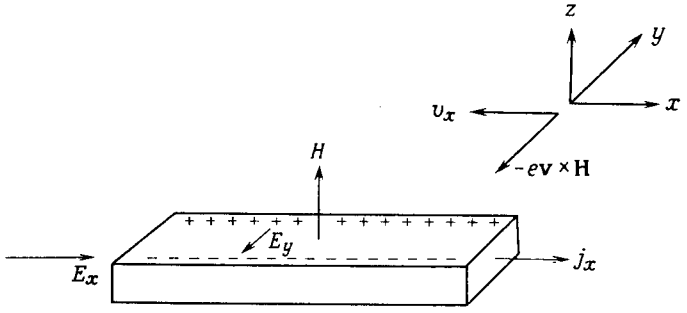
$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = -\frac{\mathbf{p}(t)}{\tau} + \mathbf{f}(t). \tag{1.12}$$

Это уравнение означает, что эффект столкновений отдельных электронов сводится к введению в уравнение движения для импульса, приходящегося на один электрон, дополнительного члена, описывающего затухание за счет трения.

Применим теперь формулу (1.12) к нескольким интересующим нас случаям.

ЭФФЕКТ ХОЛЛА И МАГНЕТОСОПРОТИВЛЕНИЕ

В 1879 г. Холл попытался определить, действует ли сила, испытываемая проводником с током в магнитном поле, на весь проводник или же только (как мы бы сейчас сказали) на электроны, движущиеся в проводнике. Сам он подозревал последнее, и его эксперимент основывался на том, что, «если электрический



Фиг. 1.3. Схема эксперимента Холла.

ток в закрепленном проводнике сам притягивается к магниту, то этот ток должен подходить ближе к одной из сторон проводника и поэтому испытываемое им сопротивление должно нарастать» [4]. Его попытки обнаружить такое добавочное сопротивление оказались безуспешными [1]), но Холл не считал, что это позволяет делать окончательные выводы: «Магнит может *стремиться* отклонить ток, не будучи способным сделать это. Очевидно, в таком случае в проводнике существовало бы состояние напряжения, как бы электрическое давление, действующее в направлении одной из сторон проводника». Подобное состояние напряжения должно проявляться в существовании поперечной разности потенциалов (или э. д. с. Холла, как мы ее сегодня называем), которую Холлу удалось наблюдать.

Схема эксперимента Холла изображена на фиг. 1.3. К проводнику, расположенному вдоль оси x, приложено электрическое поле E_x, вызывающее электрический ток j_x. Помимо того, имеется магнитное поле $\mathbf{H}$, параллельное оси z. В результате появляется сила Лоренца [2])

$$-\frac{e}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{H}, \tag{1.13}$$

[1]) В гл. 12 и 13 мы увидим, что сопротивление действительно возрастает (сопротивление в магнитном поле называют магнетосопротивлением). Модель Друде, однако, предсказывает равенство нулю магнетосопротивления в согласии с результатом Холла.

[2]) Имея дело с немагнитными (или слабо магнитными) материалами, мы всегда будем считать полем величину $\mathbf{H}$, поскольку разница между $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ в этом случае чрезвычайно мала.

отклоняющая электроны в отрицательном направлении оси y (дрейфовая скорость электрона направлена *против* тока). Однако электроны не могут долго двигаться в направлении оси y, поскольку они достигают границы проводника. По мере того как они там скапливаются, нарастает электрическое поле, направленное вдоль оси y и противодействующее движению и дальнейшему накоплению электронов. В состоянии равновесия это поперечное поле (или поле Холла) E_y компенсирует силу Лоренца, и ток идет лишь в направлении оси x.

Две величины представляют здесь интерес. Одна из них — это отношение поля вдоль проводника E_x к плотности тока j_x:

$$\rho(H) = \frac{E_x}{j_x}. \tag{1.14}$$

Холл обнаружил, что эта величина (магнетосопротивление) не зависит от поля [1]. Другой характеристикой является величина поперечного поля E_y. Поскольку такое поле уравновешивает силу Лоренца, можно полагать, что оно должно быть пропорциональным как приложенному полю H, так и току j_x в проводнике. Поэтому величину, называемую коэффициентом Холла, определяют как

$$R_H = \frac{E_y}{j_x H}. \tag{1.15}$$

Следует обратить внимание на то, что, поскольку поле Холла направлено против оси y (фиг. 1.3), коэффициент R_H должен быть отрицательным. С другой стороны, если бы заряд носителей был положительным, знак их x-компоненты скорости был бы обратным и сила Лоренца осталась бы неизменной. В результате поле Холла имело бы направление, противоположное тому, которое оно имеет при отрицательно заряженных носителях. Этот вывод очень важен, поскольку он означает, что измерения поля Холла позволяют определить знак носителей заряда. Экспериментальные данные, впервые полученные Холлом, находились в согласии со знаком заряда электрона, определенным позднее Томсоном. Одна из замечательных особенностей эффекта Холла заключается, однако, в том, что в некоторых металлах коэффициент Холла положителен, и поэтому носители в них должны, видимо, иметь заряд, противоположный заряду электрона. Это еще одна загадка, решение которой должна дать полная квантовомеханическая теория твердого тела. В настоящей главе дан лишь простой анализ в рамках модели Друде; хотя он и не способен объяснить существование положительных коэффициентов Холла, он часто находится в довольно хорошем согласии с экспериментом.

Чтобы рассчитать коэффициент Холла и магнетосопротивление, определим вначале плотности тока j_x и j_y в случае, когда имеется электрическое поле с произвольными компонентами E_x и E_y, а также магнитное поле $\mathbf{H}$, направленное вдоль оси z. На каждый электрон действует (не зависящая от пространственных координат) сила $\mathbf{f} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{H}/c)$, поэтому уравнение (1.12) для импульса в расчете на один электрон приобретает вид [2]

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -e\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{p}}{mc} \times \mathbf{H}\right) - \frac{\mathbf{p}}{\tau}. \tag{1.16}$$

[1] Точнее, эта величина представляет собой поперечное магнетосопротивление. Существует также и продольное магнетосопротивление, измеряемое в магнитном поле, параллельном току.

[2] Следует иметь в виду, что сила Лоренца не одинакова для всех электронов, поскольку она зависит от скорости электрона $\mathbf{v}$. Поэтому силу $\mathbf{f}$ в уравнении (1.12) нужно считать средней силой в расчете на один электрон (см. примечание 2 на стр. 26). Поскольку, однако, зависимость этой силы от того, на какой электрон она действует, содержится лишь в члене, *линейном* по скорости электрона, среднее значение силы получается просто путем замены этой скорости на среднюю скорость $\mathbf{p}/m$.

В стационарном состоянии ток не зависит от времени, поэтому p_x и p_y удовлетворяют уравнениям

$$0 = -eE_x - \omega_c p_y - \frac{p_x}{\tau},$$
$$0 = -eE_y + \omega_c p_x - \frac{p_y}{\tau}, \tag{1.17}$$

где

$$\omega_c = \frac{eH}{mc}. \tag{1.18}$$

Умножая эти уравнения на $-ne\tau/m$ и вводя компоненты плотности тока (1.4), находим

$$\sigma_0 E_x = \omega_c \tau j_y + j_x,$$
$$\sigma_0 E_y = -\omega_c \tau j_x + j_y, \tag{1.19}$$

где σ_0 — статическая электропроводность для модели Друде в отсутствие магнитного поля, описываемая выражением (1.6).

Поле Холла E_y определяется из требования обращения в нуль поперечного тока j_y. Полагая j_y равным нулю во втором уравнении (1.19), получаем

$$E_y = -\left(\frac{\omega_c \tau}{\sigma_0}\right) j_x = -\left(\frac{H}{nec}\right) j_x. \tag{1.20}$$

Следовательно, для коэффициента Холла (1.15) имеем

$$R_H = -\frac{1}{nec}. \tag{1.21}$$

Это поразительный результат: согласно ему, коэффициент Холла не зависит ни от каких параметров металла, кроме плотности носителей. Выше мы уже вычисляли n, предполагая, что валентные электроны атома в металле превращаются в электроны проводимости. Измерение коэффициента Холла дает прямой способ проверки справедливости такого предположения.

При попытках определить плотность электронов n, используя результаты измерений коэффициентов Холла, возникает трудность, связанная с тем, что в действительности в противоречие с формулой (1.21) эти коэффициенты обычно зависят от магнитного поля. Кроме того, они зависят от температуры и от того, насколько тщательно приготовлен образец. Это кажется довольно странным, поскольку время релаксации, которое может сильно зависеть от температуры и состояния образца, в (1.21) не фигурирует. Тем не менее при самых низких температурах для очень чистых, тщательно приготовленных образцов в чрезвычайно сильных полях измеряемые значения постоянной Холла, по-видимому, действительно стремятся к некоторому пределу. Согласно более сложной теории, излагаемой в гл. 12 и 13, для многих (но не всех) металлов такие предельные значения точно определяются простым выражением (1.21), получаемым в модели Друде.

Коэффициенты Холла для некоторых металлов в сильных и промежуточных полях приведены в табл. 1.4. Обратите внимание на наличие положительных значений R_H, что, очевидно, соответствует положительно заряженным носителям. Поразительный пример наблюдаемой зависимости от поля, которая совершенно не объясняется теорией Друде, изображен на фиг. 1.4.

Теоретический результат Друде подтверждает экспериментальное наблюдение Холла, не обнаружившего зависимости сопротивления от поля. Действи-

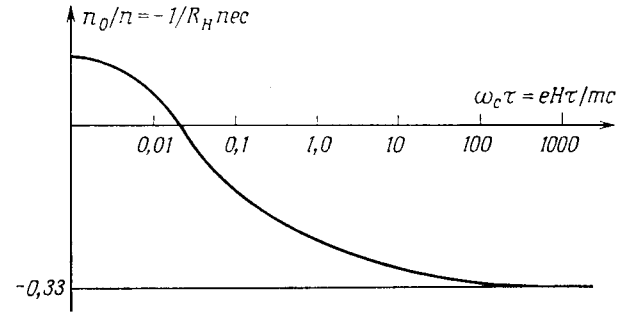
Таблица 1.4

Коэффициенты Холла некоторых металлов для полей от промежуточного до сильного [a])

Металл	Валентность	$-1/R_H nec$
Li	1	0,8
Na	1	1,2
K	1	1,1
Rb	1	1,0
Cs	1	0,9
Cu	1	1,5
Ag	1	1,3
Au	1	1,5
Be	2	—0,2
Mg	2	—0,4
In	3	—0,3
Al	3	—0,3

[a]) Грубо говоря, в таблице приведены значения, к которым стремится R_H для тщательно приготовленных образцов в пределе, когда поле становится очень большим (порядка 10^4 Гс), а температура — очень низкой. Приведенные данные представляют собой отношение n_0/n, где n_0 — плотность носителей, для которой значение R_H, рассчитанное по формуле Друде (1.21), совпадает с измеренным: $n_0 = -1/R_H ec$. Видно, что для щелочных металлов результат Друде выполняется достаточно хорошо, для благородных металлов (Cu, Ag, Au) — хуже, а для остальных, указанных в таблице, не выполняется совсем.

тельно, при $j_y = 0$ (как это имеет место в стационарном состоянии, когда поле Холла уже установилось) первое из уравнений (1.19) сводится к уравнению $j_x = \sigma_0 E_x$, т. е. проводимость имеет такую же величину, как и в нулевом магнитном поле. Однако, как показали более точные эксперименты на многих



Фиг. 1.4. Зависимость величины $n_0/n = -1/R_H nec$ от $\omega_c\tau$ для алюминия. (Из работы [5].)

Значение плотности n в модели свободных электронов найдено по номинальной химической валентности, равной в данном случае трем. Значение n_0/n в сильных полях показывает, однако, что на элементарную ячейку приходится лишь один носитель, причем положительно заряженный.

металлах, в действительности сопротивление обнаруживает зависимость от магнитного поля, в ряде случаев очень сильную. Объяснение того, почему теория Друде оказывается применимой для одних металлов, а для других возникают такие разительные расхождения, тоже должна дать квантовая теория твердого тела.

Прежде чем завершить обсуждение статических явлений в однородном магнитном поле, отметим для последующего, что для характеристики напряженности магнитного поля удобно использовать безразмерную величину $\omega_c\tau$, играющую в теории важную роль. Когда величина $\omega_c\tau$ мала, из уравнений (1.19) следует, что ток $\mathbf{j}$ почти параллелен $\mathbf{E}$, как это было бы в отсутствие магнитного поля. В общем случае ток $\mathbf{j}$ направлен к $\mathbf{E}$ под углом φ (называемым углом Холла). Из уравнений (1.19) следует, что $\operatorname{tg}\varphi = \omega_c\tau$. Величина ω_c, называемая циклотронной частотой, представляет собой просто круговую частоту [1]) вращения свободного электрона в магнитном поле H. Произведение $\omega_c\tau$ мало, если электроны между столкновениями могут проделать лишь малую часть оборота, и велико, если они могут совершить много оборотов. Иначе говоря, когда $\omega_c\tau \ll 1$, магнитное поле лишь слегка деформирует орбиты электронов, а когда величина $\omega_c\tau$ сравнима с единицей и больше, то влияние магнитного поля на орбиты электронов становится преобладающим. Для численной оценки циклотронной частоты удобна формула

$$\nu_c\,(10^9\ \text{Гц}) = 2{,}80 \cdot H\,(\text{кГс}), \quad \omega_c = 2\pi\nu_c. \tag{1.22}$$

ВЫСОКОЧАСТОТНАЯ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ МЕТАЛЛА

Чтобы рассчитать ток, вызываемый в металле зависящим от времени электрическим полем, запишем это поле в виде

$$\mathbf{E}(t) = \operatorname{Re}\left(\mathbf{E}(\omega)\, e^{-i\omega t}\right). \tag{1.23}$$

Тогда уравнение движения (1.12) для импульса, приходящегося на один электрон, приобретает вид

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\mathbf{p}}{\tau} - e\mathbf{E}. \tag{1.24}$$

Будем искать стационарное решение в форме

$$\mathbf{p}(t) = \operatorname{Re}\left(\mathbf{p}(\omega)\, e^{-i\omega t}\right). \tag{1.25}$$

Подставляя комплексные величины $\mathbf{p}$ и $\mathbf{E}$ в уравнение (1.24), которое должно выполняться по отдельности для действительной и мнимой частей, получаем, что $\mathbf{p}(\omega)$ удовлетворяет уравнению

$$-i\omega\mathbf{p}(\omega) = -\frac{\mathbf{p}(\omega)}{\tau} - e\mathbf{E}(\omega). \tag{1.26}$$

Так как $\mathbf{j} = -ne\mathbf{p}/m$, плотность тока равна

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(t) &= \operatorname{Re}\left(\mathbf{j}(\omega)\, e^{-i\omega t}\right), \\ \mathbf{j}(\omega) &= -\frac{ne\mathbf{p}(\omega)}{m} = \frac{(ne^2/m)\,\mathbf{E}(\omega)}{(1/\tau) - i\omega}. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Обычно этот результат записывают в виде

$$\mathbf{j}(\omega) = \sigma(\omega)\,\mathbf{E}(\omega), \tag{1.28}$$

---

[1]) В постоянном магнитном поле электрон движется по спирали, ось которой параллельна полю. Проекция этой спирали на плоскость, перпендикулярную полю, представляет собой окружность. Круговую частоту ω_c определяют, исходя из того, что центростремительное ускорение $\omega_c^2 r$ вызывается силой Лоренца $(e/c)\,(\omega_c r)\,H$.